Name :Samir Adili.
Title : Critères d'actions propres des groupes affines et applications.
Position : "Professeure Agrégée principale" at ISSAT "the Higher Institute of Applied Sciences and Technology of Mahdia".
Date of defense : June 27, 2022.
Referees :
Abstract :La caractérisation des groupes affines discontinus pour R^n est essentielle pour l'étude des déformations des formes de Clifford-Klein affines sur R^n ; notament l'étude des problèmes de rigidité et de stabilité des déformations d'action affine discontinu pour R^n : C'est encore un pas essentiel vers une réponse à une conjecture de L. Auslander. Dans la présente thèse, on donne une description des groupes affinement discontinus pour R^2 ; des groupes affines abéliens cristallographiques pour R^n et une description des orbites sous l'action des groupes discrets abéliens agissant librement sur R^n. Cette thèse est composée d'une introduction, des généralités et six chapitres :
Le premier chapitre intitulé groupe fondamantal et revêtements, c'est un cadre assez réduit de la topologie algébrique. Ce chapitre est fondamantal dans la théorie de deformation parce que, en réalité, ce qui se déforme pour une forme de Clifford-Klein est le groupe d'automorphismes de son revêtement par l'espace homogène, ce groupe coincide avec le groupe fondamental de la forme lorsque l'espace homogène est connexe et simplement connexe.

Le deuxième chapitre intitulé géométrie modèle est partagé en deux sections : la première est consacrée pour les (G, X)-structures et leurs représentation d'holonomie, la deuxième est reservée pour des généralités sur la théorie de déformation d'une (G, X)-variété.

Le troisième chapitre est le fruit dŠun papier publié dans "International Journal of Mathematics" intitulé critère de lŠaction propre pour les groupes abéliens affines qui contient divers résultats. Un premier résultat est que tout groupe abélien affine discontinu pour R^n est isomorphe à Z^k avec $0 \leq k \leq n$: Un deuxième résultat est que, sous lŠhypothèse de lŠaction libre dŠun groupe abélien affine discret sur R^n, lŠorbite dŠun point quelconque de R^n est discrète si et seulement si elle est fermée. Un troisième résultat est une description des groupes cristallographiques pour R^n.

Le quatrième chapitre est réservé pour les sous-groupes de$Aff(\mathbb{R}^2)$ qui sont discontinus pour $\mathbb{R}^2$ à savoir les groupes abéliens qui sont isomorphes à $\mathbb{Z}^k$ avec $k \in \{1, 2\}$ est les non abéliens qui sont des groupes de rang deux, plus précisement contiennent $\mathbb{Z}^2$ d'indice fini, à isomorphisme près, il s'agit du groupe fondamental de la bouteille de Klein. Visiblement les résultats du chapitre précédent sont vrais pour tout sous-groupe discontinu pour $\mathbb{R}^2$.

Dans le cinquième chapitre, on étudie les problèmes de rigidité et de stabilité pour la déformation des actions discontinus pour Rn dans le cas abélien puis Rn dans le cas général. Enfin, un sixième chapitre intitulé vers la conjecture dŠAuslander où on cite des divers résultats qui peuvent contribuer à la résolution de la conjecture.

Mots-clefs : Groupe affine, action propre, action libre,action discrète, groupe discontinu,groupe cristallographique, espace-déformation, forme de Clifford-Klein, rigidité,stabilité, pavage, groupe virtuellement résoluble, groupe polycyclique, variété affine plate.

Références

[1] Abels. H, Properly Discontinuous Groups of Affine Transformations : A Survey, Geometria Dedicata 87, 2001, 309-333

[2] Auslander. L, The structure of complete locally affine manifolds, Topology 3, Supplement 1, 1964, 131-139.

[3] Baklouti. A, Kédim. I. and Yoshino. T, On the deformation space of Clifford-Klein forms of Heisenberg groups. Int. Math. Res. Not. IMRN, No. 16 (2008), doi :10.1093/imrn/rnn066.

[4] Baklouti. A and Kédim. I, On non-abelian discontinuous groups acting on exponential solvable homogeneous spaces. Int. Math. Res. Not. IMRN, No. 7, (2010) (1315-1345).

[5] Biery. R and Geoghegan. R, Connectivity property of group actions on nonpositively curved spaces, Memoirs of the AMS, Vol 161, N. 765, 2003.

[6] Bourbaki. N, éléments de mathématiques Topologie générale chapitre 5 á 10. Springer.

[7] Fried. D and Goldman. W.M, Three-Dimensional Affine Crystallographic Groups, Advances in Mathematics 47, 1983, 1-49.

[8] Goldman. W.M, Two papers which changed my life : Milnor's seminal work on flat manifolds and bundles, Frontiers in complex dynamics, 679-703, Princeton Mathematical Series 51, Princeton University Press 2014

[9] Hofmann, K. H and Neeb, K-H, The compact generation of closed subgroups of locally compact groups. J. Group Theory 12, No. 4, 555-559 (2009).

[10] Kassel. F, Proper actions on corank-one reductive homogeneous spaces, J. Lie Theory 18 (2008), 961-978.

[11] Kassel. F, Deformation of proper actions on reductive homogeneous spaces, Math. Ann. 353(2012), 599-632.

[12] H. Queffelec and C. Zuily, Analyse pour l'agrégation, 4ème édition, Dunod 2002.

[13] Margulis. G, Complete affine locally flat manifolds with free fundamental group, Journal of Soviet Mathematics 134(1987), 129-134.

[14] Milnor. J, On Fundamental Groups of Complete Affinely Flat Manifolds, Advances in Mathematics 25, 1977, 178-187.

[15] Kobayashi. T., Proper action on homogeneous space of reductive type. Math. Ann. 285(1989), 249-263.

[16] Kobayashi. T, Discontinuous groups acting on homogeneous spaces of reductive type. Proceeding of the conference on representation theory of Lie Groups and Lie algebras held in 1990 August- september at Fuji- Kawaguchiko (ICM-90 Satellite Conference). Word Scientific, 59-75 (1992).

[17] Kobayashi. T, On discontinuous groups on homogeneous space with noncompact isotropy subgroups, J. Geom. Phys. 12, 133-144 (1993).

[18] Kobayashi. T, Discontinuous groups and Clifford-Klein forms of pseudo-Riemannian homogeneous manifolds, Perspectives in Mathematics, vol. 17, Academic Press, 99-165 (1996).

[19] Kobayashi. T, Criterion of proper action on homogeneous space of reductive type, J. Lie theory 6, 147-163 (1996).

[20] Kobayashi. T., Deformation of compact Clifford-Klein forms of indefinite Riemannian homogeneous manifolds, Math. Ann. 310 (1998), 394-408.

[21] Kobayashi. T, Discontinuous groups for non-Riemannian homogeneous space, Mathematics Unlimited-2001 and Beyond, edited by B. Engquist and W. Schmid. Springer, 723-747 (2001).

[22] Kobayashi. T. And Nasrin S., Deformation of properly discontinuous action of $\mathbb{Z}^k on \mathbb{R}^{k+1}$, Int. J. Math. 17 (2006), 1175-1193.

[23] Thurston. W.P, Three-Dimensional Geometry and Topology, Princeton University Press, 1997.

[24] Tomanov. G, Properly discontinuous group actions on affine homogeneous spaces. Proc. Steklov Inst. Math. 292, 260-271 (2016).

[25] J. Tits, Free Subgroups in Linear Groups, Journal of Algebra 20, 1972, 250- 270

[26] Abdelmoula. L, Baklouti. A and Kédim. I. The Selberg-Weil-Kobayashi Rigidity Theorem For Exponential Lie Groups. Int Math Res Notices (17) : 4062-4084. doi : 10.1093/imrn/rnr172 (2012).

[27] Baklouti. A, ElAloui. N and Kédim. I. A rigidity Theorem and a Stability Theorem for two-step nilpotent Lie groups. J. Math. Sci. Univ. Tokyo 19 (2012), 1-27.

[28] Baklouti. A, Dhieb. S and Tounsi. K. When is the deformation space $\mathfrak{f}(\Gamma H_{2n+1}; H)$; a smooth manifold ? Int. J. Math. 2 Vol. 22, No. 11 1-21 (2011).

[29] Séminaire Delange-Pisot-Poitou.Théorie des nombres. Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 14, no 1 (1972-1973), exp. no 6, p.1-8.

[30] Bieberbach. L. Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Rame. I, Math Ann. 70 (1911), 297-336.

[31] Bieberbach. L. Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Rame. II, Math. Ann. 72 (1912), 400-412.

[32] Calabi, E. and L. Markus. Relativistic space forms, Ann. Math. 75 (1962), 63-76.

[33] Goldman. W and Millson.J. J. Local rigidity of discrete groups acting on complex hyperbolic space, Invent. Math. 88, 495-520(1987).

[34] Hilgert. J and Neeb. K-H. Structure and Geometry of Lie Groups,. Springer Monographs in Mathematics, DOI 10.1007/978-0-387-84794-8, c Springer Science+Business Media, LLC 2012.

[35] Motzkin.T.S and Taussky. O, Pairs of matrices with property L, Trans. Amer. Math. Soc. 73 :108-114 (1952).

[36] Oliver, R. K. On Bieberbach's analysis of discrete euclidean groups. Proc. Amer. Math. Soc. 80 (1980), 15-21.

[37] Robinson.D.J. A course in the theory of groups, 2nd ed. Springer-Verlag, 1996.

[38] Selberg. A. On discontinuous groups in higher-dimension symmetric spaces, In : Contributions to Functional Theory, Tata Institute, Bombay, 1960, pp. 147-164.

[39] Serre, J-P. Représentations linéaires des groupes finis. Collection Méthodes. Paris : Hermann. 182 p. (1998).

[40] Stallings, John R. On torsion-free groups with infinitely many ends. Ann. Math. (2) 88, 312-334 (1968).

[41] Weil. A. On discrete subgroups of Lie groups II, Ann. Math. 75, 578-602(1962).

[42] Weil. A. Remarks on the cohomology of groups, Ann. Math. 80, 149-157(1964).

[43] Adkins. William A. and Weintraub. Steven H. An Approach via Module Theory. Graduate texts in mathematics ; ISBN 0-387-97839-9 Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg.

[44] Baklouti. A and Bejar. S. On Calabi-Markus phenomenon and a rigidity Theorem for Euclidean motion groups. Kyoto. J. Math. To appear.

[45] Baklouti. A and Bejar. S. Variants of stability concepts for Euclidean motion groups. preprint.

[46] Nicolas Bergeron. Sous-groupes discrets de groupes de Lie et géomètrie hyperbolique. Menoire DEA en ligne .

[47] William M. Goldman. Locally homogeneous geometric manifolds. Proceedings of the International Congress of Mathematicians Hyderabad, India, 2010.

[48] Frédéric Paulin. Groupes et géométries. Cours de seconde année de mastère. 2013-2014 Département de Mathématiques d'Orsay.

[49] Frédéric Paulin. Topologie algébrique élémentaire. Cours de première année de mastère École Normale Supérieure. Année 2009-2010.

[50] Ehresmann, Charles. SUR LES ESPACES LOCALEMENT HOMOGÈNES. Persistenter Link : http ://dx.doi.org/10.5169/seals-27319

[51] Pierre de la Harpe. REPRESENTATIONS DES GROUPES FINIS. Université de Genève. Cours de 3 e et 4 e années 2005-2006.

[52] ELIE CARTAN. LE RÔLE DE LA THÉORIE DES GROUPES DE LIE DANS L'ÉVOLUTION DE LA GÉOMÉTRIE MODERNE

[53] ELIE CARTAN. LA THÉORIE DES GROUPES ET LES RECHERCHES RÉCENTES DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE.

[54] Shiing-Shen Chern. What Is Geometry ?.The American Mathematical Monthly, Vol. 97, No. 8, Special Geometry Issue (Oct., 1990), pp. 679-686.

[55] The Auslander conjecture for dimension less than 7 H. Abels, G.A. Margulis and G.A. Soifer June 4, 2013

[56] Jean-Yves Welschinger. Introduction aux théories homologiques Juin 2016.