Name : Samiha Hidri.

Title : Formes bilinéaires invariantes sur les algèbres de Leibniz et les systèmes triples de Lie (resp. Jordan)(Thèse en cotutelle avec Saîd Benayadi, Université de Lorraine).

Position : "Assistant Professor" at IPEIG "Institut prépératoire aux études d'ingénieurs de Gabès".

Date of defense : November 14, 2016.

Referees : A. Makhlouf (Haute Alsace-Mulhouse) and F. Wagemann (Nantes).

Abstract : Il existe trois types d'algèbres classiques fortement liées : Les algèbres associatives, les algèbres de Lie et les algèbres de Jordan. En fait, toute algèbre associative $(A, .)$ munie du produit (de Jordan) $x \bullet y := \frac{1}{2}(x.y + y.x)$ est une algèbre de Jordan. D'autre part, si on muni A du produit (crochet de Lie) $[x, y] := x.y - y.x$, alors $(A, [\,,\,])$ devient une algèbre de Lie. De plus, d'après les travaux de J. Tits, M. Koecher et I. Kantor, on peut à partir de toute algèbre de Jordan costruire une algèbre de Lie. C'est la costruction KKT. Il est bien connu que l'algèbre enveloppante universelle d'une algèbre de Lie a la strucure d'une algèbre associative.

Récemment, Plusieurs généralisations de ces algèbres classiques ont apparues.

En 1993, J. L. Loday a introduit la notion d'algèbre de Leibniz ([53]). C'est une généralisation non anti-commutative des algèbres de Lie. Loday a aussi introduit la notion de di-algèbre comme généralisation des algèbres associatives avec deux opérateurs ([52]). Ensuite, il a traduit la relation entre les algèbres de Lie et les algèbres associatives en une relation analogue entre les algèbres de Leibniz et les di-algèbres ([52]). La construction KKT a été aussi généralisée au cas des algèbres de Leibniz, mais en partant d'une algèbre quasi-Jordan (généralisation des algèbres de Jordan) ([60]).

Une généralisation impressionante résultant des problèmes de la physique théorique est celle des algèbres n-aires. Une algèbre n-aire est un espace vectoriel muni d'un produit n-linéaire ($n \in \mathbb{N}$). Il est clair que pour $n = 2$, une algèbre binaire est une algèbre au sens usuel. Pour $n = 3$, une $3-$algèbre est dite parfois un système triple.

Dans cette thèse, on s'interesse aux n-algèbres de Lie, de Jordan et de Leibniz avec $n = 2$ et $n = 3$. En particulier, on étudie la structure de ces algèbres lorsque elles sont munie d'une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée et associative. On rappelle que si $(A, .)$

est une algèbre non- associative quelconque et B est une forme bilinéaire sur A, alors on dit que B est associative si $B(x.y,z) = B(y,x.z), \forall x,y,z \in A$.
Du point de vue géométrique, l'existance d'une telle forme bilinéaire sur une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (dite quadratique) donne naissance à une structure Reimannienne bi-invariante sur tout groupe de Lie connexe qui a $\mathfrak{g}$ pour algèbre de Lie. Réciproquement, si G est un groupe de Lie muni d'une structure pseudo-Reimannienne bi-invariante, alors son algèbre de Lie est quadratique.
Plusieurs travaux de recherches ont été consacré à l'étude de quelques types d'algèbres ayant cette structure ([5], [3], [7]). Dans tout ces travaux utilise la notion de la double extension introduite par A. Medina et Ph. Revoy dans [55], pour donner une description inductive de ces structures. N'oublions pas de mentionner le processus de le T^*-extension introduite par M. Bordmann dans le cas général des algèbres non-associatives ([16]).
Tout ces faits forment la motivation des sujets traités dans cette thèse. Qui sont : Les algèbres de Leibniz, les systèmes triples de Lie et les systèmes triples de Jordan munis d'une forme bilinéaire symétrique, non-dégénérée et associative (ou invariante). On note que les espaces vectoriel considérés sont de dimensions finis sur des corps de caracteristique zéro.
Dans le pemier chapitre, on résume des résultats généraux sur la structure de ces algèbres ainsi que les connexions qui les relient. Après ce chapitre, le mémoire se décompose en deux parties.

Première partie

Les algèbres de Leibniz

La notion d'algèbre de Leibniz a été introduite par J. L Loday. C'est une généralisation non-anti commutative des algèbres de Lie qui joue une rôle important dans la cohomologie de Hochild [53] . Il résulte alors deux types d'algèbres de Leibniz : Les algèbres de Leibniz gauches et les algèbres de Leibniz droite. Une algèbre de Leibniz gauche (resp. droite) est un espace vectoriel $\mathfrak{L}$ muni d'un produit $[\,,\,] : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}$ tel que pour tout $x, y \in \mathfrak{L}$, $[x,[y,z]] = [[x,y],z] + [y,[x,z]]$ (resp. $[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y]$). Si $\mathfrak{L}$ est à la fois une algèbres de Leibniz gauche et droite, alors on dit que $\mathfrak{L}$ est une algèbre de Leibniz

symétrique ([36]). Ces dernières algèbres apparaissent dans l'étude des connections bi-invariante des groupes de Lie ([12]). Dans les dernières années, la théorie des algèbres de Leibniz a été extensivement étudiée. Plusieurs résultat des algèbres de Lie ont été généralisées au cas des algèbres de Leibniz ([22], [29], [30], [34], [36], [37], [39]). On note que toute algèbre de Lie est une algèbre de Leibniz. Inversement, soit $\mathfrak{L}$ une algèbre de Leibniz gauche (ou droite). Alors, on appelle le noyau de Leibniz de $\mathfrak{L}$ l'idéal $\mathscr{I}_{\mathfrak{L}}$ engendré , en tant que sous-espace vectoriel, par l'ensemble $\{[x, x], x \in \mathfrak{L}\}$. D'où, l'algèbre quotion $\mathfrak{L}/\mathscr{I}_{\mathfrak{L}}$ est une algèbre de Lie. En particulier, si $\mathscr{I}_{\mathfrak{L}} = \{0\}$ alors $\mathfrak{L}$ est une algèbre de Lie.
Puisque l'existance d'une forme bilinéaire symétrique, non-dégénérée et associative sur une algèbre non associative $(A, .)$ est un outil important dans l'étude de la structure de A(par exemple, la forme de Killing sur une algèbre de Lie semi-simple, la forme d'Albert sur une algèbre de Jordan semi simple). Alors, on a consacré le chapitre 2 de cette thèse à l'étude des algèbres de Leibniz munie d'une forme bilinéaire symétrique, non-dégénérée et associative dites les algèbres de Leibniz quadratiques. On donne, dans la section 2, quelques propriétées de ces algèbres ; On montre que toutes les algèbres de Leibniz (gauches ou droites) quadratiques sont symétriques. Puis, on construit plusieurs exemples intérressant d'algèbres de Leibniz symétriques qui ne sont pas des algèbres de Lie. Les algèbres de Leibniz symétriques construites peuvent donner naissance à des algèbres de Leibniz quadratiques plus grandes en leurs appliquant le procédé de la T^*-extension. Pour celà, on rappelle dans la section 3, la T^*-extension des algèbres de Leibniz symétriques. Il en résulte plusieurs exemples d'algèbres de Leibniz quadratiques. Le procédé de la T^*-extension a permis à M. Bordmann de décrire les algèbres non associatives nilpotentes quadratiques et les algèbres de Lie résolubles quadratiques. Dans cette même section, on démontre que les algèbres de Leibniz résolubles quadratiques sont décrites par les algèbres de Lie résolubles au moyen du procédé de la T^*-extension dans la catégorie des algèbres de Leibniz symétriques. Plus précisément :
Si $(\mathfrak{L}, B)$ une algèbre de Leibniz quadratique résoluble de de dimension n. Alors, $\mathfrak{L}$ admet un idéal isotrope maximal $\mathfrak{H}$ de dimension $[\frac{n}{2}]$ qui contient l'idéal de Leibniz $\mathscr{I}_{\mathfrak{L}}$ de $\mathfrak{L}$. Si n est pair, alors $\mathfrak{L}$ est isomorphe à une T^*-extension de l'algèbre de Lie $\mathfrak{L}/\mathfrak{H}$. Si n est impair, alors $\mathfrak{L}$ est isomorphe à un idéal nondégénéré de codimension un dans une T^*-extension de l'algèbre de Lie $\mathfrak{L}/\mathfrak{H}$.

Dans le but de donner une description complète de toute les algèbres de Leibniz quadratiques, on utilise le processus de La double extension. Dans la dernière section de ce chapitre, on introduit la double extension des algèbres de Leibniz quadratiques. Ce qui nous permet de donner une description inductive des algèbres de Leibniz quadratiques :
Si Σ l'ensemble formé par $\{0\}$, l'algèbre de Lie de dimension un et par toutes les algèbres de Lie simples. Alors, toute algèbre de Leibniz quadratique est obtenue à partir d'un nombre fini d'éléments $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ de Σ par un nombre fini de sommes directes orthogonales et/ou de doubles extensions dans la catégorie des algèbres de Leibniz par l'algèbre de Lie de dimension un et/ou des doubles extensions dans la catégorie des algèbres de Lie par une algèbre de Lie simple et/ou de doubles extensions dans la catégorie des algèbres de Lie par l'algèbre de Lie de dimension un.
Dans [43], les auteurs ont considérer un autre type d'asociativité pour une forme bilinéaire sur une algèbre de Leibniz gauche qui coïncide avec notre définition dans le cas des algèbres de de Lie. Mais, ils ont utilisé le processus de la T^*-extension, qui n'est pas adaptée à ce type d'invariance. Ce qui leur a permis de traiter un cas particulier d'algèbre de Leibniz. Dans le chapitre 2, on utilise une nouvelle approche afin d'améliorer le résultat donné dans [43].
Pour une forme bilinéaire B sur une algèbre de Leibniz $(\mathfrak{L}, [\,,\,])$ (gauche ou droite), à part la notion d'associativité, on a l'invariance à gauche et l'invariance à droite. On dit que B est invariante à gauche (resp. à droite) si, $B([x, y], z]) = -B(y, [x, z]), \forall x, y, z \in \mathfrak{L}$ (resp. $B([x, y], z) = -B(x, [z, y]), \forall x, y, z \in \mathfrak{L}$). Il nous reste alors quatre cas à traiter : Les algèbres de Leibniz gauches munie d'une forme bilinéaire symétrique, non-dégénérée et invariante à gauche (resp. à droite) et Les algèbres de Leibniz droite munie d'une forme bilinéaire symétrique, non-dégénérée et invariante à gauche (resp. à droite). Vue qu'il y a une correspondance entre les algèbres de Leibniz gauche et droite ([53]), alors on n'a qu'à étudier Les algèbres de Leibniz gauches munie d'une forme bilinéaire symétrique, non-dégénérée et invariante à gauche (resp. à droite). Soit $(\mathfrak{L}, [\,,\,])$ une algèbre de Leibniz gauche et B une forme bilinéaire symétrique, non-dégénérée et invariante à gauche sur $\mathfrak{L}$. Soit $\star : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}$ une application bilinéaire satisfaisant $B([x, y], z) = B(x, y \star z), \forall x, y, z \in \mathfrak{L}$. En s'inspirant de la T^*-extension, on donne une méthode de construction d'algèbres de Leibniz gauches munie d'une forme bilinéaire symé-

trique, non-dégénérée et invariante à gauche. Dans [43] , les auteurs ont donné un résultat similaire avec $\star = 0$. On montre que si $(\mathfrak{L}, [\,,\,])$ est une algèbre de Leibniz symétrique, alors $(\mathfrak{L}, \star)$ est une algèbre de Lie dite l'algèbre de Lie associée à $\mathfrak{L}$. De plus, on prouve que $\star := \frac{1}{2}([x,y] + [y,x]) + \Theta(x,y), \forall x, y \in \mathfrak{L}$, où Θ est un 2-cocycle de $(\mathfrak{L}, \star)$ dans le module trivial $Ann_d(\mathfrak{L})$ (i. e. $\Theta \in Z^2((\mathfrak{L}, \star), Ann_d(\mathfrak{L}))$. En utilisant les constructions définies dans le deuxième chapitre, on donne quelques résultats sur la structrue des algèbres de Leibniz symétriques munie d'une forme bilinéaire symétrique, non-dégénérée et invariante à gauche ainsi que l'algèbre de Lie y associée. Finalement, on prouve des résultats analogues dans le cas des les algèbres de Leibniz gauches munie d'une forme bilinéaire symétrique, non-dégénérée et invariante à droite.

Deuxième partie

Les systèmes triples de Lie

Les systèmes triples de Lie ont été vus pour la première fois dans les travaux d'Elie Cartant lors de son étude de la géométrie Riemannienne ([20]). Un système triple de Lie peut être définit comme l'espace propre relativement à la valeur propre -1 d'une involution d'une algèbre de Lie. Dans [54], il est démontré que la catégorie des systèmes triples de Lie est équivalente à la catégorie des espaces symétriques connexes et simplement connexes. Pour plus d'informations sur ce sujet, on se réfère à [18], [45], [58] . En plus que la géométrie différentielle ([47], [48])et l'investigation de la géométrie des groupes de Lie simples exeptionelles [35], les systèmes triples ont des importantes applications en physique. En particulier, N. Kamya et S. Okubo ont établit une connexion entre les systèmes triples de Lie et les équations de Yang-Baxter [44].

Du point de vue algèbrique, un système triple de Lie est un espace vectoriel $\mathscr{L}$ muni d'un produit triple $[\,,\,,\,] : \mathscr{L} \times \mathscr{L} \times \mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{L}$ vérifiant :

$$[x, x, z] = 0,$$

$$[x, y, z] + [y, z, x] + [z, x, y] = 0,$$

$$[u, v, [x, y, z]] = [[u, v, x], y, z] + [x, [u, v, y], z] + [x, y, [u, v, z]], \ \forall x, y, z, u, v \in \mathscr{L}.$$

Plusieurs travaux de recherches fournissent une étude algèbrique des systèmes triples de Lie ([42], [17], [40], [51], [62] . . .). Le chapitre 5 de cette thèse est dédier à l'étude des systèmes triples de Lie quadratiques. Un système triple de Lie quadratique est la donnée d'un système triple de Lie $\mathscr{L}$ avec une forme bilinéaire symétrique, non-dégénérée et associative B. i. e. $B([x,y,z],u) = -B(z,[x,y,u]), \forall x,y,z,u \in \mathscr{L}$. On sait que si $(\mathfrak{g},[\,,\,])$ est une algèbre de Lie, alors en considérant le produit triple $[x,y,z] := [[x,y],z], \forall x,y,z \in \mathfrak{g}$, $(\mathfrak{g},[\,,\,,\,])$ devient un système triple de Lie. Inversement, à partir d'un système triple de Lie $\mathfrak{L}$, on peut construire une algèbre de Lie involutive dont $\mathscr{L}$ est l'espace propre relativement à la valeur propre -1 de cette involution ([57]). Dans [63] , il est démontré que si on part d'un système triple de Lie quadratique, alors l'algèbre de Lie involutive construite par cette construction est quadratique. Les systèmes triples de Lie quadratiques nilpotents ont été décrit au moyen de la T^*-extension introduite dans [50]. Dans cette thèse, on introduit la notion de la double extension des systèmes triples de Lie. C'est une extension centrale suivie d'un produit semi-direct définit à l'aide d'une nouvelle représentation des systèmes triples de Lie qu'on appelle la représentation généralisée des systèmes triples de Lie. Dans [32], il est introduit la double extension dans le cas des 3-algèbres de Lie. Une 3-algèbre $\mathscr{V}$ est dite 3-algèbre de Lie si

$$[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}] = (-1)^{|\sigma|}[x_1, x_2, x_3],$$

$$[x_1,x_2,[x_3,x_4,x_5]] = [[x_1,x_2,x_3],x_4,x_5] + [x_3,[x_1,x_2,x_4],x_5] + [x_3,x_4,[x_1,x_2,x_5]],$$

$\forall x_i \in \mathscr{V}, i \in \{1,\ldots,5\}, \sigma \in \mathscr{S}_3$.

IL est clair que l'intersection des systèmes triples de Lie et des 3-algèbres de Lie est l'espace vectoriel à produit nul. La description inductive des systèmes triples de Lie quadratiques est donnée par le theorème suivant :

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble formé par $\{0\}$, le système triple de Lie de dimension un et tout les systèmes triples de Lie simples.

Theorem 0.0.1. *Soit $(\mathscr{L},B)$ un système triple de Lie quadratique. Si $\mathscr{L} \notin \mathscr{E}$, alors $\mathscr{L}$ est obtenu à partir d'un nombre finis d'éléments $\mathscr{L}_1,\ldots,\mathscr{L}_n$ de $\mathscr{E}$, par un nombre finis de sommes directes orthogonale de systèmes triples de Lie quadratiques et/ou de doubles extensions par un système triple de Lie simple et/ou de doubles extensions par le système triple de Lie de dimension un.*

Les systèmes triples de Jordan

La théorie des algèbres de Lie joue un rôle important dans le developpement de la theorie des algèbres et des systèmes triple de Jordan, dès que la construction KKT a apparus. En effet, l'étude de la structure des systèmes triples de Jordan passe souvent par les structures de Lie y associées. On rappelle qu'un système triple de Jordan est une 3−algèbre $(\mathscr{J}, \{\ ,\ ,\ \})$ vérifiant

$$\{x, y, z\} = \{z, y, x\}$$

$$\{x, y, \{u, v, w\}\} - \{u, v, \{x, y, w\}\} = \{\{x, y, u\}, v, w\} - \{u, \{y, x, v\}, w\},$$

$$\forall u, v, w, x, y \in \mathscr{J}.$$

Plusieurs travaux ont été consacrés à l'étude des systèmes triples de Jordan en l'occurence [57], [56], [42],. . ..

Dans [57], on trouve les notions de bases des systèmes triples de Lie et de Jordan. En particulier, on note le theorème de Meyberg qui montre que tout système triple de Jordan peut être muni de la structure d'un système triple de Lie sur le même espace vectoriel sous-jacent. De ce fait, K. Meyberg a représenté la construction KKT dans le cas des systèmes triples de Jordan. Il résulte alors, qu'à partir d'un système triple de Jordan $\mathscr{J}$, on peut construire une algèbre de Lie dite la TKK algèbre de Lie de $\mathscr{J}$. Dans [27], il est établit une connexion entre un type particulier de systèmes triples de Jordan et les algèbres de Lie graduées. Ce qui a permis d'établir une correspondance entre une classe de systèmes triples de Jordan (les JH-triples) et les espaces symériques Riemanniens. Voir [28] ,pour plus d'informations sur la géométrie des systèmes triples de Jordan.

Dans le dernier chapitre, on étudit les systèmes triples de Jordan pseudo-Euclidien. Un système triple de Jordan $(\mathscr{J}, \{\ ,\ ,\ \})$ est dit pseudo-Euclidien s'il admet une forme bilinéaire B symétrique , non-dégénérée et associative (i. e. $B(\{x, y, z\}, u) = B(z, \{y, x, u\}) = B(x, \{u, z, y\}), \forall x, y, z, u \in \mathscr{J}$). Le premier exemple de ces systèmes triples est celui des systèmes triples de Jordan semi-simples (munis de la forme trace [57]). On montre que si $\mathscr{J}$ est un système triple de Jordan pseudo-Euclidien, alors sa TKK algèbre de Lie est quadratique. Dans le but de mieu comprendre la structure des systèmes triples de Jordan pseudo-Euclidiens, on définit la T^*-extension des systèmes triples de Jordan. Ensuite, on montre le résultat suivant

Theorem 0.0.2. *Soit $(\mathfrak{J}, B)$ un système triple de Jordan pseudo-euclidien de dimension n. Alors, $(\mathfrak{J}, B)$ est isomorphe à une T^*-extension $(T^*_w(\mathfrak{J}_1), B_1)$ si et seulement si n est pair et $\mathfrak{J}$ contient un idéal isotrope $\mathscr{I}$ de dimension $\frac{n}{2}$. Si n est impair et $\mathscr{I}$ est un* *idéal isotrope de* $\mathfrak{J}$ *de dimension* $[\frac{n}{2}]$*. Alors,* $\mathfrak{J}$ *est isomorphe à un idéal non dégénérée de codimension* 1 *dans une* T^**-extension du système triple de Jordan* $\mathfrak{J}/\mathscr{I}$*.*

A la fin de ce chapitre, on donne deux nouvelles caractérisatins des systèmes triples de Jordan semi-simples parmis les systèmes triples de Jordan pseudo-Euclidiens. La première caractérisation utilise l'opérateur de Casimir. Soient $(\mathscr{J}, B)$ un système triple de Jordan pseudo-euclidien, $\mathscr{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ et $\mathscr{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ deux bases orthogonales de $\mathscr{J}$ (i.e $B(a_i, b_j) = \delta_i^j, \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$ où δ_i^j est le symbole de chronicker). On définit l'opérateur de Casimir de $\mathscr{J}$ Λ comme suit

$$\Lambda = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big(L(a_i, b_i) + L(b_i, a_i)\Big).$$

On montre que $\mathscr{J}$ est semi-simple si et seulement si $\Lambda_{\mathscr{A}}$ est inversible.
Afin de donner une deuxième caractérisation des systèmes triples de Jordan semi-simples, on définit la notion de l'indice d'un système triple de Jordan pseudo-Euclidien $\mathscr{J}$ qu'on note $ind(\mathscr{J})$ comme étant la dimension de l'espace vectoriel engendré par les produit scalairs invariants sur $\mathscr{J}$. On prouve que $\mathscr{J}$ est simple si et seulement si $ind(\mathscr{J}) = 1$.

Bibliographie

[1] Albeverio, S., Ayupov, Sh. A., Omirov, B. A. Cartan subalgebras, weight spaces, and criterion of solvability of fnite dimensional Leibniz algebras. Revista Matematica Complutense, 2006, 19(1) :183-195.

[2] . Albeverio, S., Omirov, B. A., Rakhimov I. S. Classifcation of 4-dimensional nilpotent complex Leibniz algebras. Extracta mathematicae, 2006, 21(3) :197-210.

[3] H. Albuquerque, S. Benayadi, Quadratic Malcev Superalgebras, J. Pure Appl. Algebra 187, (2004), 19 .. 45.

[4] Ayupov, Sh. A., Omirov, B. A. On 3-dimensional Leibniz algebras. Uzbek. Math. Zh., 1999, no. 1, p. 9-14.

[5] Baklouti, A., and S. Benayadi, *Pseudo-Euclidiean Jordan algebras*, arXiv :08113702v1[Math.RA], (2008).

[6] I. Bajo, S. Benayadi, ″Lie algebras admitting a unique quadratic structure″, Comm. Algebra 25 (9) (1997) 2795-2805.etz thesis (2007).

[7] A. Baklouti, W. Ben Salah, S. Mansour, Solvable Pseudo-Euclidean Jordan Superalgebras, Comm. Algebra 41 (2013), 2441 .. 2466.

[8] D. Barnes, On Levi's theorem for Leibniz algebras, Bull. Aust. Math. Soc., 2012, 86(2) :184- 185.

[9] D. Barnes,On Engel's theorem for Leibniz algebras. Comm. Algebra, 2012, 40(4) :1388-1389.

[10] I. Bars, M. Gundaydin, ″construction of Lie algebras and Lie superalgebras from ternary algebras″, J. MAth. Phys. 20, 1977-199", (1997).

[11] S. Benayadi, ″ A new characterization of semi-simple Lie algebras ″ , Proceedings of the American Mathematical Society, 125, 3(1997), 685-688.

[12] S. Benayadi and M. Boucetta, Special bi-invariant linear connections on Lie groups and finite dimensional Poisson structures, Differential Geometry and Applications 36 (2014), pages 66–89.

[13] Benayadi. S, Hidri. S, Quadratic Leibniz algebras, Journal of Lie Theory Volume 24 (2014) 737–759.

[14] Benayadi. S, Hidri. S, Leibniz algebras with invariant bilinear form, to appear in Communication in Algebra.

[15] Baklouti. A, Hidri. S, Jordan and Lie triple systems with nondegenerate bilinear forms, to submit.

[16] M. Bordemann, ″Nondegenerate invariant bilinear forms on nonassociative algebras″, Acta Math. univ. Com, LxvI, 2, 151-201, (1997).

[17] I. Burdujan, ″ A universal envelopping algebra for a Lie triple system″, Proc. of the 3rd Int. Colloquium "Mathematics in Engineering and Numerical Physics", Oct 7-9 , (2004).

[18] Cahen, Michel and Wallach, Nolan : Lorentzian symmetric spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970), 585591.

[19] Canete, E. M., Khudoyberdiyev, A. Kh. The Classifcation of 4-dimensional Leibniz algebras, Linear Algebra Appl., 2013, 439(1) : 273-288.

[20] E. Cartan, ″Oeuvres complètes″, Part1, Paris Gauthier-Villars, vol. 2, 102-138, (1952).

[21] Casas, J.M., Insua, M.A., Ladra, M., Ladra, S. An algorithm for the classifcation of 3- dimensional complex Leibniz algebras. Linear Algebra Appl. 2012, 436 : 3747-3756.

[22] J. M. Casas, M. Ladra, B. A. Omirove, I. A. Karimjanov, ″ Classification of solvable Leibniz algebras with naturally graded filiform nilradical ″, arXiv :1203.4772v1 [math. RA], (2012)

[23] J. M. Casas, J. L. Loday, T. Pirashvili, Leibniz n-algebras, Forum Math. 14(2002). 189-207.

[24] Chelsie Batten Ray, Allison Hedges, Ernest Stitzinger, Classifying several classes of Leibniz algebras, Algebras and Representation Theory April 2014, Volume 17, Issue 2, pp 703-712

[25] J. Chenal, Generalized flag geometries and manifolds associated to short Z-graded Lie algebras in arbitrary dimension C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 21-25.

[26] J. Chenal, Generalized flag geometries and manifolds associated to short Z-graded Lie algebras in arbitrary dimension C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 21-25.

[27] cho-Hu Chu, Jordan triples and Reimannian symmetric spaces, Advances in Mathematics 219 (2008) 2029–2057

[28] Cho-Hu Chu, Jordan structure ib geometry and analysis, Camridge tracts in mathematics

[29] S. Covez, ″ The local integration of Leibniz algebras, arXiv :1011. 4112v1 [math. RA], (2010)

[30] C. Cuvier, ″ Algèbres de Leibnitz : Définition, propriés ″, Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e serie, tome 27, p 1-45, (1994)

[31] I. Demir, K. C. Misra, E. Stitzinger,On some structures of Leibniz algebras, contemporary Mathematics

[32] P. de Medeiros, J. Figueroa-O'Farrill, E. Mendez-Escobar, Metric Lie 3-algebras in Bagger–Lambert theory,JHEP 0808 :045,2008.

[33] A. Fialowski, A. Kh. Khudoyberdiyev, B. A. Omirov, A caracterization of nilpotent Leibniz algebras, Algebras and Representation Theory October 2013, Volume 16, Issue 5, pp 1489-1505

[34] A. Fialowski, L. Magnin, A. Mandan, ″ About Leibniz cohomology and deformations of Lie algebras″, arXiv :1103. 2694v1 [math. QA] (2011)

[35] H. Frendenthal, ″Beziehungen der E7 und E8 zur oktavenebene, I, II″, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. A, 57, 218-230, (1954).

[36] M. Geoffrey, Y. Gaywalee, ″ Leibniz algebras and Lie algebras ″, arXiv :1201. 5071v1 [math. RA], (2012)

[37] S. GÒmez-Vidal, B.A. Omirov, A.K.H. Khudoyberdiyev, ″ Some remarks on semisimple Leibniz algebras ″, arXiv :1201. 5559v1. [math. RA] (2012)

[38] Gorbatsevich, V. On some basic properties of Leibniz algebras, arxiv :1302.3345v2.

[39] A. Hedges and E. Stitzinger, More on the Frattini Subalgebra of a Leibniz Algebra, arXiv :1206.5707v2 [math.RA] (2013).

[40] L. T. Hodge, L. B. Parshall, ″On the representatios theory of Lie triple systems″, Trans. Amer. Math. Soc, 4359-4391, (2002).

[41] N. C. Hopkins, Nilpotent ideals in Lie and anti-Lie triple systems, J. Algebra, 178(1995),

[42] N. Jacobson, ″Lie and Jordan triple systems″, Amer. J. Math., 71 :149–170, 1949.

[43] Jie. Lin, Zhiqi. Chen, Leibniz algebras with pseudo-Riemannian bilinear forms, Front. Math. China 2010, 5(1) : 103–115 DOI $10.1007/s11464-009-0055-z$.

[44] N. Kamyia, S. Okubo, ″On Lie triple systems and Yang-Baxter Equations″, Proc. of the 7th Int. Colloquium of differential equations (Plovdiv, 1995), VSP, Utrecht, 189-196, (1997).

[45] Kath, Ines and Olbrich, Martin : The classification problem for pseudo-Riemannian symmetric spaces. Recent developments in pseudo-Riemannian geometry, pages 152, ESI Lect. Math. Phys., Eur. Math. Soc., Zurich, 2008.

[46] M.Koecher, ″Imbedding of Jordan algebras into Lie algebras. I″. Amer. J. Math. 89, 787-816, (1967)

[47] P. I. Kovaljov, ″ Lie triple systems and spaces with affine connections″, Math Zametki, 14, 1, 107-112, (1973).

[48] P.I. Kovaljov, ″ On a class of Lie triple systems″, Ukr, Geom. Sb. , 14, 24-28, (1973).

[49] O. Kûhn and A. Rosendahl, Wedderburnzerlegung fur Jordan-Paare, Manuscripta Math., 24 (1978), 403-435.

[50] J. Lin, y. Wang S. Deng, T^*-extension of Lie triple systems, Linear Algebra Appl.(2009),doi :10.1016/j.laa.2009.07.001.

[51] W. G. Lister, ″A structure theory of Lie triple systems″, Trans. Amer. Math. Soc. 72, 217-242, (1952).

[52] Loday, J.L., , ″ Dialgebras ″, in : Dialgebras and related operads, Lectures Notes in Mathematics, vol. A763, Springer Verlag, pp 7-66,(2001)

[53] LODAY, J.L., , ″ Une version non commutative des algèbres de Lie : Les algèbres de Leibniz″, Ens. Math. 39 (1993), 269-293.

[54] O. Loos, ″Symmetric spaces″, W. A. Benjamin New York, vol. I, II, (1969).

[55] A. MEDINA, PH. REVOY,″Algèbre de Lie et produit scalaire invariant ″, Ann. MScient. Ec. Norm. Sup., 4ème sèrie, 18 (1985) 553–561.

[56] E. NEHER, ″Jordan Triple systems with completely reducible derivation or structure algebras″, Pacific J. Math, vol 113, no 1, (1984) 137-164.

[57] K. Meyberg, Lectures on algebras and triple systems, Lecture notes, The university of virginia, Charlottesville (1972).

[58] Neukirchner, Thomas : Solvable pseudo-Riemannian symmetric spaces. Preprint, 58 pages, 2003. See http ://arxiv.org/abs/math/0301326

[59] L. Sabinin, L. Sbitneva, I. Shestakov, Non-associativ algebras and its applications, Aseries of lecture notes in pure and applied Mathematics, vol 246.

[60] R. Velàsquez, R. Felipe, On K-B quasi-Jordan algebras and their relation with Leibniz algebras, Communicacions del CIMAT.

[61] Rikhsiboev, I.M., Rakhimov I.S. Classifcation of three dimensional complex Leibniz algebras. AIP Conference Proc., 2012, 1450 :358-362.

[62] K. Yamaguti, On algebras of totally geodesic spaces (Lie triple systems), J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A 21 (1957/1958), 107-113.

[63] Z. x. Zhang, y. Q Shi, L. N. Zhao, ″Invariant symmetric bilinear forms on Lie triple systems″. Comm. Algebra 30, No. 11, 5563-5573, (2002).

[64] Z. X. Zhang, R. Gao, The Killing form for Lie triple system, Journal of Mathematical Research and Exposition July, 2009, Vol. 29, No. 4, pp. 745–752